PART2　直線と平面の垂直

2 原点 O および 3 点 A(1, 0, 0), B(2, 1, 0), C(0, 0, 2) がある。点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標を求めよ。

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。

Point Pickup

平面 ABC 上に点 H があるとき，次のことが成り立つ。

$$\mathrm{OH} \perp \text{平面 ABC} \iff \overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

第14講　PART2　確認問題

1　原点Oおよび3点A(0, 4, 5), B(2, 3, 5), C(0, 5, 4)があある。点Oから平面ABCに下ろした垂線の足をHとする。次の問いに答えよ。

(1)　点Hの座標を求めよ。

H(ア , イ , ウ)

(2)　四面体OABCの体積 V を求めよ。

$V =$ エ

PART2　直線と平面の垂直

2　原点Oおよび3点 A(1, 0, 0), B(2, 1, 0), C(0, 0, 2) がある。点Oから平面ABCに下ろした垂線の足をHとする。次の問いに答えよ。

(1)　点Hの座標を求めよ。

(2)　四面体OABCの体積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ 2)$

点Hは平面ABC上の点であるから, s, t を実数として

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

$$=(1,\ 0,\ 0)+s(1,\ 1,\ 0)+t(-1,\ 0,\ 2)=(s-t+1,\ s,\ 2t)$$

OH ⊥ 平面ABCより　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　かつ　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より　$(s-t+1)\times1+s\times1+2t\times0=0$

よって　$2s-t=-1$ …… ①

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より　$(s-t+1)\times(-1)+s\times0+2t\times2=0$

よって　$-s+5t=1$ …… ②

①, ②より　$s=-\dfrac{4}{9}$, $t=\dfrac{1}{9}$

よって　$\overrightarrow{OH}=\left(-\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{9}+1,\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)=\left(\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$ であるから

点Hの座標は　$\left(\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$

(2)　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{2}{9}(2,\ -2,\ 1)$ より　$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{2}{9}\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\dfrac{2}{9}\times3=\dfrac{2}{3}$

また, $|\overrightarrow{AB}|^2=1^2+1^2+0^2=2$, $|\overrightarrow{AC}|^2=(-1)^2+0^2+2^2=5$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-1)+1\times0+0\times2=-1$ より

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\times5-(-1)^2}=\frac{3}{2}$$

よって, 求める体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times OH=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

第 14 講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イ：4，ウ：4，エ：3

[解説]

(1)　$\overrightarrow{AB}=(2,\ -1,\ 0)$

$\overrightarrow{AC}=(0,\ 1,\ -1)$

点 H は平面 ABC 上の点であるから，s，t を実数として

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$
$$=(0,\ 4,\ 5)+s(2,\ -1,\ 0)+t(0,\ 1,\ -1)$$
$$=(2s,\ -s+t+4,\ 5-t)$$

OH ⊥ 平面 ABC より

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　かつ　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ [A]

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より

$$2s\times2+(-s+t+4)\times(-1)+(5-t)\times0=0$$

よって　$5s-t=4$ ……①

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より

$$2s\times0+(-s+t+4)\times1+(5-t)\times(-1)=0$$

よって　$-s+2t=1$ ……②

①，②より　$s=1$，$t=1$

よって

$$\overrightarrow{OH}=(2,\ -1+1+4,\ 5-1)=(2,\ 4,\ 4)$$

したがって，点 H の座標は　**(2，4，4)**

(2)　$\overrightarrow{OH}=2(1,\ 2,\ 2)$ より

$$|\overrightarrow{OH}|=2\sqrt{1^2+2^2+2^2}=2\times3=6$$

また

$$|\overrightarrow{AB}|^2=2^2+(-1)^2+0^2=5$$
$$|\overrightarrow{AC}|^2=0^2+1^2+(-1)^2=2$$

[A]　平面 ABC 上に点 H があるとき
OH ⊥ 平面 ABC
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　かつ　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times0+(-1)\times1+0\times(-1)$$
$$=-1$$

ゆえに

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$ [B]

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5\times2-(-1)^2}=\frac{3}{2}$$

[B]　△ABC の面積を S とすると
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

よって，求める体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times OH=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times6=3$$